



Il pendolo di Wilberforce: un'analisi completa con accelerometro/giroscopio, smartphone e modellizzazione dinamica

Giacomo Torzo¹, Massimiliano Zanichelli², Michele D'Anna³

¹ AIF e Dipartimento di Fisica, Università di Padova

² IISS Emilio Gadda, Fornova

³ Liceo cantonale, Locarno [retired]

Abstract

The Wilberforce pendulum is a didactical device often used in class demonstration to show the amazing phenomenon of coupled oscillations (rotational and longitudinal) producing beats in a special mass-spring set up. The phenomenon is particularly surprising for a distant observer, who easily detects the longitudinal motion, but may skip the presence of rotation. To him (her) the vertical oscillation appears to damp out completely and then it rises again without external action (as if an invisible force would come in). In this paper we propose a revised version of the classical experiment, as an example of an efficient didactical use of modern technologies, suggesting a deeper understanding of phenomena through real time data acquisition of both the rotation and the vertical oscillation, using a MEMS accelerometer/gyroscope and the free software Phyphox to show the device motion on a smartphone screen. A detailed analysis of the motion and energy aspects is then performed using the free modeling tool InsightMaker.

Introduzione

Il pendolo di Wilberforce¹ [1] ha suscitato la curiosità di molti autori [2-6], tra cui Arnold Sommerfeld, che ha scritto una trattazione teorica completa [7,8,9]. Recentemente è stato studiato anche utilizzando sistemi di acquisizione dati in tempo reale (sonar interfacciato a un PC misurando solo l'oscillazione verticale) [10], videocamera e software/hardware complessi [11], o accelerometro-giroscopio [12] (ma utilizzando costosi datalogger e software), o utilizzando accelerometro/giroscopio integrato negli smartphone (mancante però di una registrazione completa dei movimenti rotatori e longitudinali) [13-16].

Sono disponibili anche pendoli Wilberforce commerciali, con misurazioni *indirette* dello spostamento verticale z e dell'angolo di rotazione α , utilizzando un sensore di coppia/forza, che richiede costosi datalogger e software [17].

In questo lavoro discutiamo i risultati ottenuti con un *dispositivo wireless* che caratterizza il movimento del pendolo Wilberforce sia per oscillazioni verticali che rotazionali, non richiedendo né datalogger, né software, ma semplicemente un comune

¹ Prende il nome da Robert Lionel Wilberforce, insegnante di fisica presso i *Cavendish Labs*, che nel 1894 dimostrò come una massa cilindrica sospesa a una molla elicoidale possa subire oscillazioni sia rotazionali che longitudinali, pubblicando in seguito l'articolo *On Vibrations of Loaded Spiral Spring*, in *Philosophical Magazine* 38, 386 (1895).

smartphone o *tablet*. Successivamente i dati raccolti vengono confrontati con le previsioni di un modello elaborato all'interno di un ambiente di modellizzazione dinamica.

1. L'apparato sperimentale

La dinamica del pendolo Wilberforce comprende tre diversi tipi di movimento: due oscillazioni roto-traslazionali e un'oscillazione mista con battimenti, in cui l'energia del sistema viene trasferita tra le oscillazioni verticali e rotazionali. Questo comportamento peculiare si ottiene se:

1. i collegamenti rigidi sono previsti su entrambe le estremità della molla elicoidale destrorsa,
2. il rapporto k/δ tra la costante elastica traslazionale k e la costante elastica torsionale δ corrisponde strettamente al rapporto m/I tra la massa m e il momento inerziale I del pendolo.

Il nostro pendolo (Fig. 1) utilizza una molla in acciaio inox da 50 spire (diametro bobina 25 mm, diametro filo 1,3 mm) e un bob cilindrico in ottone di circa 0,5 kg (con 4 viti per la messa a punto del momento inerziale), e nella parte inferiore un sensore di orientamento assoluto MEMS (comprensivo di accelerometro e giroscopio) azionato da un microcontrollore ESP32 con *Wi-Fi* e *Bluetooth* integrati e batteria agli ioni di litio.

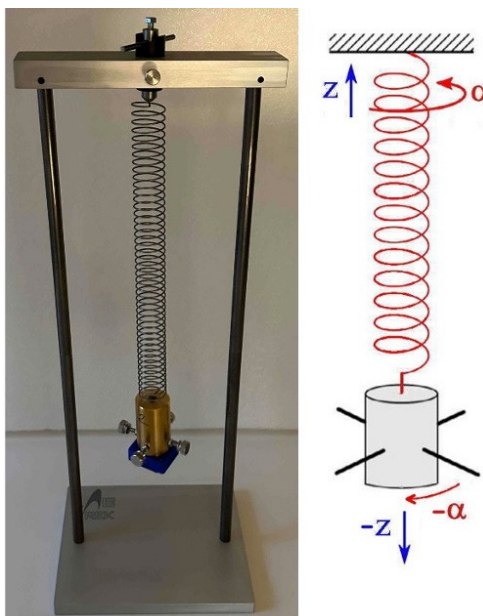


Figura 1. Il pendolo di Wilberforce. A sinistra l'apparato, a destra lo schema con il sistema di riferimento usato.

L'estremità superiore della molla è fissata a un cilindro di acciaio che può ruotare lungo l'asse verticale e spostarsi in direzione verticale (Fig. 2).

Con una scelta appropriata dello spostamento iniziale z_0 e dell'angolo di rotazione α_0 possiamo eccitare ciascuno dei tre diversi movimenti del pendolo che ci interessano.

Il dispositivo meccanico mostrato in Fig. 2 funziona come segue: una piccola rotazione manuale in senso *orario* della barra orizzontale conferisce *all'estremità superiore della molla* sia uno spostamento verso l'alto che una rotazione in senso orario (a causa delle inclinazioni della parte superiore del cilindro cavo). Si noti che un'azione applicata all'estremità superiore della molla corrisponde a un'azione *opposta* applicata al bob: in questo caso uno spostamento del bob $-z$ e una rotazione del bob $-\alpha$ (modo normale 1, con z e α *in fase*, vedi Sezione 4). Una rotazione *antioraria* della barra eccita invece il modo normale 2 (con z e α *in opposizione di fase*).

L'inclinazione dei piani di taglio nel cilindro di Fig. 2 determina il rapporto z_0/α_0 .



Figura 2. Dispositivo di sospensione roto-traslazionale.

Le schede con il sensore MEMS, il microprocessore e la batteria sono inserite in un involucro stampato in 3D che viene avvitato sul fondo del cilindro in ottone.

Utilizzando l'ambiente di sviluppo *Arduino*, abbiamo caricato nel microprocessore il codice per la connessione Bluetooth all'applicazione *Phyphox* e per la conversione dei dati dei segnali di uscita del sensore MEMS (accelerazione verticale a_z e angolo di rotazione α). Conoscendo i valori della costante elastica k e della massa oscillante m , utilizzando la legge di Newton ($F_z = ma_z$), la legge di Hooke ($F_z = -kz - \frac{\varepsilon\alpha}{2}$) (modificata dal *termine di accoppiamento elastico* come spiegato nella Sezione 3), calcoliamo i valori di spostamento z (in funzione dei valori misurati per l'accelerazione a) attraverso l'equazione:

$$z = -\left(\frac{m}{k}\right) a_z - \left(\frac{\varepsilon}{k}\right) \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

2. Risultati sperimentali

Un esempio dell'angolo di rotazione registrato e dello spostamento verticale è mostrato in Figura 3, dove i battimenti sono evidenti: l'oscillazione verticale si scarica lentamente mentre l'oscillazione rotazionale aumenta, quindi il processo si inverte (circa ogni 1/2 minuto) con l'energia associata a ciascuna oscillazione che si trasferisce da un movimento all'altro, con piccola dissipazione.

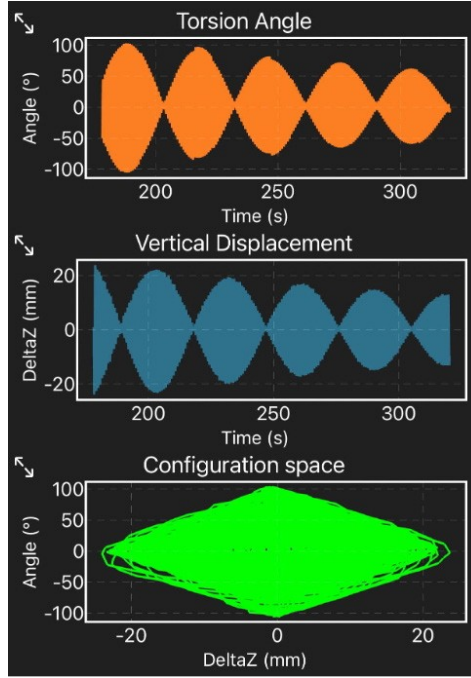


Figura 3. Esempio di dati registrati per il moto misto. Grafico in alto: angolo di rotazione α . Grafico centrale: spostamento verticale z . Grafico in basso: angolo α vs. spostamento z .

In Fig. 3 le oscillazioni longitudinali e torsionali eccitate dall'inizio del moto con spostamento iniziale $z_0 = 25$ mm e α_0 hanno lo stesso periodo. Questa condizione è necessaria per ottenere uno scambio energetico completo. L'adattamento del periodo può essere ottenuto regolando il momento d'inerzia del bob oscillante attraverso le 4 manopole a vite che sporgono dal cilindro in ottone.

3. Analisi energetica

Per studiare l'evoluzione temporale dell'energia del nostro sistema (sia l'oscillazione verticale che quella rotazionale) dobbiamo considerare un termine cinetico E_k e un termine potenziale elastico E_e^2 . Per il *moto traslazionale* abbiamo:

$$E_T = E_{kT} + E_{eT} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kz^2 \quad (2)$$

dove m è la massa oscillante, v la sua velocità, k la costante elastica della molla e z il suo spostamento verticale dalla posizione di equilibrio. Per il *moto rotatorio* abbiamo:

$$E_R = E_{kR} + E_{eR} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}\delta\alpha^2 \quad (3)$$

dove I è il momento d'inerzia del bob, $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ la sua velocità angolare, δ la costante torsionale della molla e α l'angolo di rotazione.

Notiamo che per ottenere un'espressione completa dell'*energia totale* del sistema,

2 Come consueto, scegliamo la posizione di equilibrio come "zero" per lo spostamento verticale, così che nell'energia potenziale dell'oscillatore (e quindi nel bilancio complessivo) il contributo gravitazionale non compare più esplicitamente.

non è necessario descrivere esplicitamente lo smorzamento (poiché i valori dinamici aggiornano i rispettivi contributi energetici ad ogni istante). Tuttavia, oltre ai quattro contributi precedenti, è *necessario* introdurre un termine che descriva l'interazione tra traslazione e moto rotatorio³. Seguendo il modello proposto da Sommerfeld [7], introduciamo l'energia di interazione $E_{int} = \frac{1}{2}\varepsilon\alpha z$, dove ε è il *coefficiente di accoppiamento* che caratterizza la molla e dipende dalle sue proprietà geometriche oltre che dalle proprietà meccaniche del materiale di cui la molla è fatta. L'equazione completa per l'energia del pendolo di Wilberforce è quindi:

$$E_{Wilber} = E_T + E_R + E_{int} = \frac{1}{2}(mv^2 + kz^2 + I\omega^2 + \delta\alpha^2 + \varepsilon\alpha z) \quad (4)$$

Per valutare il comportamento dei vari termini è necessario conoscere i valori dei quattro parametri m, k, I e δ .

Per determinare k possiamo misurare l'allungamento della molla sotto una forza nota (ad esempio il peso del cilindro mg).

Una misura del momento di inerzia I per il nostro *oggetto non cilindrico* (costituito dal cilindro di ottone, dalle sue viti sporgenti e dalla scatola contenente l'elettronica attaccata in basso) può essere ottenuta attraverso due misurazioni del periodo di rotazione: prima con il solo bob, e poi aggiungendo un *cilindro anulare* (di massa nota M , raggio interno R_i , raggio esterno R_e), il cui momento d'inerzia è $I_a = \frac{1}{2}M(R_i^2 + R_e^2)$.

I due periodi (senza e con il cilindro anulare) obbediscono alle relazioni

$$\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 = \frac{I_x}{\delta}, \quad \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 = \frac{I + I_a}{\delta}, \quad \text{che danno } I = \frac{I_a T_1^2}{(T_2^2 - T_1^2)}.$$

Possiamo infine determinare la *costante di torsione* δ dal periodo misurato $T = \frac{2\pi}{\omega}$ utilizzando la relazione che fornisce la velocità angolare ω . Otteniamo: $\delta = I \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$.

4. I modi normali

Per scoprire le frequenze dei modi normali del pendolo di Wilberforce, iniziamo analizzando lo spostamento verticale $z(t)$ nel caso in cui siano presenti battimenti che trasferiscono totalmente energia dal moto traslazionale a quello rotatorio (Fig. 3). Le condizioni iniziali per raggiungere questa situazione sono soddisfatte spostando verticalmente il pendolo di $z(0)=z_0$, senza rotazione ($\alpha(0)=0$) e rilasciandolo da fermo $v(0) = v_0$ e $\omega(0) = 0$.

In queste circostanze, la trasformata di Fourier (FFT) dei dati illustrati in Fig. 3 per lo spostamento *verticale* z mostra due picchi distinti (della stessa altezza) alle frequenze di 1,26 Hz e 1,29 Hz (Fig. 4). Ciò è dovuto alla sovrapposizione dei due modi normali.

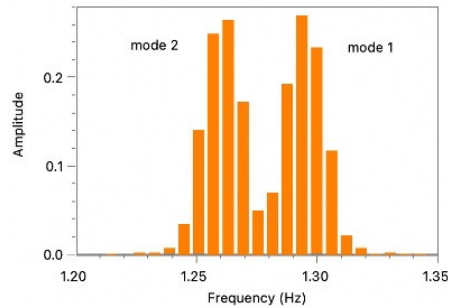


Figura 4. FFT dei dati illustrati in Figura 3 per lo spostamento verticale z .

³ In una molla elicoidale destrogira rigidamente appesa (con riferimento al sistema di coordinate z, α di Figura 1), se si sollecita l'estremità libera con una trazione ($z < 0$) senza applicare alcuna torsione (ad esempio mediante un sottile filo con costante elastica torsionale trascurabile) si osserverà che la spirale più bassa ruota con $\alpha > 0$. Il verso di tale rotazione si inverte per trazioni di una molla levogira.

Questi ultimi possono essere eccitati singolarmente scegliendo opportunamente le condizioni iniziali, (ovvero il rapporto z_0/α_0) come spiegato nella Sezione 1. Le registrazioni delle rotazioni e delle traslazioni per i due modi normali sono illustrate in Fig.5.

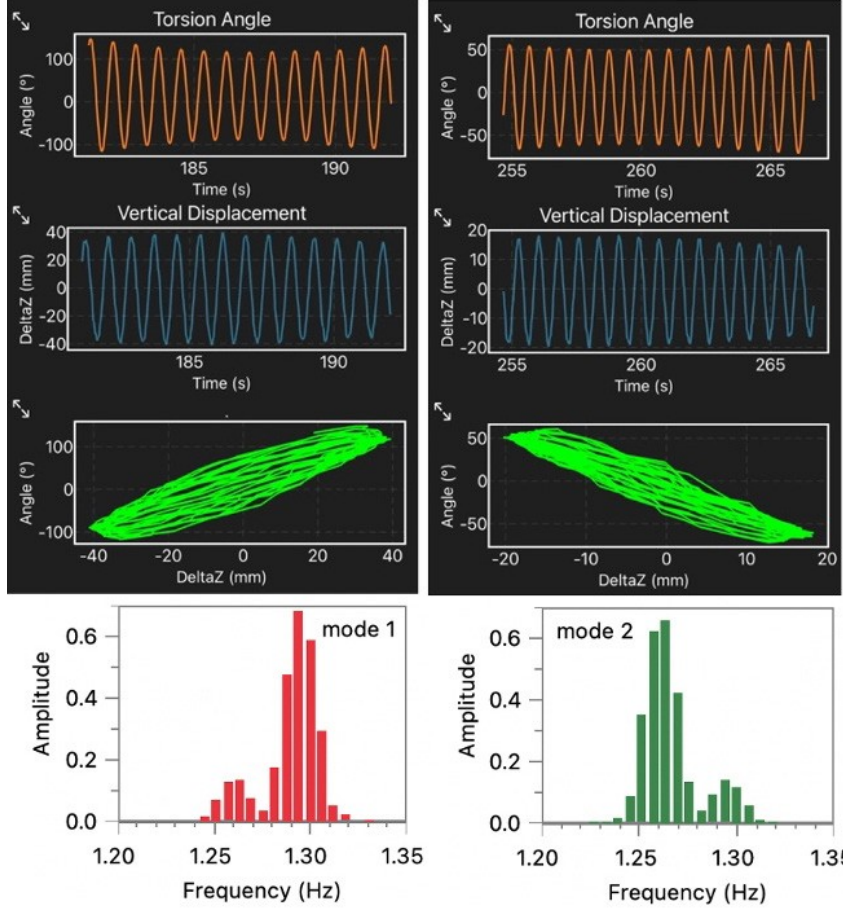


Figura 5. Esempio di dati registrati per le due modalità normali e corrispondenti grafici FFT.

L'analisi delle equazioni del moto che forniscono le frequenze dei due modi normali ω_1 e ω_2 può essere trovata in diversi articoli [2 - 9]. Qui ci limitiamo al caso in cui il pendolo è sintonizzato finemente, una situazione che si ottiene quando i moti verticali e rotazionali mostrano la stessa frequenza, cioè quando $\omega_z = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \omega_\alpha = \left(\frac{\delta}{I}\right)^{1/2} = \omega_0$.

Nel nostro caso la frequenza di battimento ω_B (correlata alla rapidità di trasferimento di energia) è di gran lunga inferiore alla frequenza di oscillazione meccanica ω_0 . Questo ci permette di utilizzare le relazioni linearizzate per le frequenze proprie dei modi normali ω_1 e ω_2 [3], che sono valide proprio nel caso di accoppiamento debole, più facili da gestire:

$$\omega_1 = \omega + \frac{\varepsilon}{4(kI)^{1/2}} \quad \omega_2 = \omega - \frac{\varepsilon}{4(kI)^{1/2}} \quad (5)$$

Si può dimostrare [3] che i modi normali possono essere eccitati scegliendo le condizioni iniziali: $z_0 = +\Gamma\alpha_0$ per il modo normale 1 e $z_0 = -\Gamma\alpha_0$ per il modo normale 2, dove $\Gamma = \left(\frac{I}{m}\right)^{1/2}$ è il *raggio giratore* del pendolo. Tenendo presente la relazione che esprime l'energia dell'interazione $E_{int} = \frac{1}{2}\varepsilon\alpha z$ possiamo dire che il modo normale 1 è quello caratterizzato da una *maggiore energia* e da una oscillazione *in fase* di spostamento verticale e angolo (quindi, con la nostra molla elicoidale *destrogiro* z e α hanno lo *stesso segno*), mentre il modo normale 2 è quello caratterizzato da una *minore energia* e da un'*opposizione di fase* per spostamento verticale e angolo (z e α hanno *segno opposto*).

La differenza $\omega_1 - \omega_2$ è la *frequenza di battimento* ω_B :

$$\omega_B = \frac{\varepsilon}{2(kI)^{1/2}} \quad (6)$$

Il valore della costante di accoppiamento ε determina il periodo del battimento $T_B = \frac{2\pi}{\omega_B}$. Più forte è l'accoppiamento, più veloce diventa il trasferimento di energia tra traslazione e rotazione, più breve diventa il periodo di battimento.

Un valore per ε può quindi essere ottenuto dai dati sperimentali, misurando le frequenze ω_1 e ω_2 : Infatti, dalle equazioni (5) o (6) si ha $\varepsilon = 2(\omega_1 - \omega_2)(kI)^{1/2}$.

5. Analisi con Excel

Come primo passo studiamo i risultati sperimentali utilizzando dati reali caricati in un foglio di calcolo Excel® (l'esportazione dei dati tramite connessione Wi-Fi è inclusa nell'applicazione *Phyphox*). Utilizzando gli strumenti standard di Excel calcoliamo i vari termini energetici.

Una volta determinati i quattro parametri m, k, I e δ , calcoliamo le energie *elastiche* e *cinetiche* dagli angoli e dagli spostamenti misurati, come mostrato nella Fig. 6.

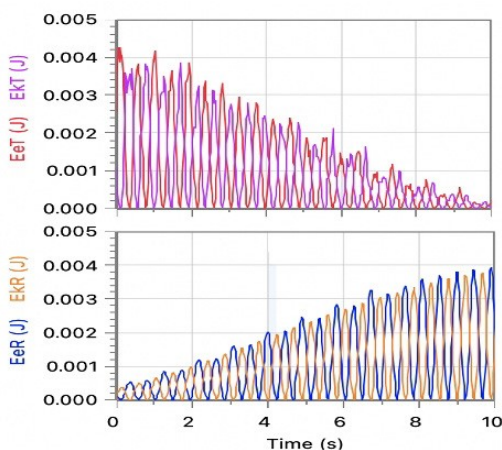


Figura 6. Energie elastica [E_e] e cinetica [E_k] per movimenti rotatori e traslatori in funzione del tempo.

La Fig. 6 mostra la trasformazione periodica dell'energia elastica in energia cinetica, sia per la traslazione che per la rotazione.

La somma dell'energia cinetica e dell'energia elastica per ogni movimento, illu-

strata in Fig. 7, $E_T = E_{eT} + E_{kT}$ e $E_R = E_{eR} + E_{kR}$, mostra il trasferimento di energia dall'oscillazione e dalla rotazione con una frequenza molto piccola ω_B .

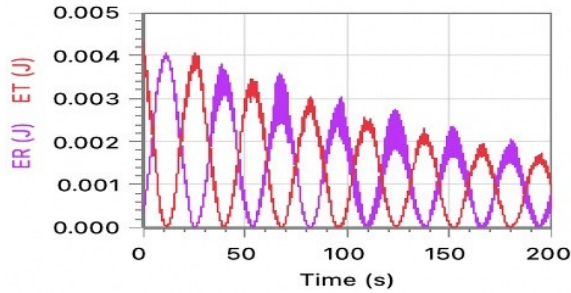


Figura 7. Energia traslazionale E_T e rotazionale E_R in funzione del tempo.

Sommando infine i tre termini $E_T(t)$, $E_R(t)$ e $E_{int}(t)$ otteniamo l'energia totale che sembra diminuire molto lentamente nel tempo (in Fig. 8 vediamo che la costante di tempo nel decadimento esponenziale dell'energia totale è di circa 185 s). Le oscillazioni che influenzano i valori calcolati in questo grafico possono essere attribuite al “rumore” nei dati registrati e all'incertezza nei parametri m, k, I, δ e ε .

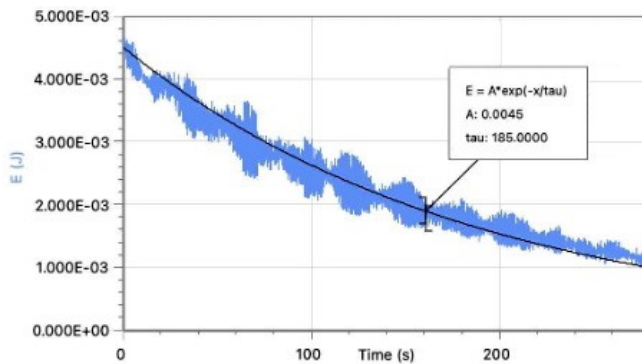


Figura 8. La somma $E_T(t) + E_R(t) + E_{int}(t)$ in funzione del tempo.

L'uso di *Excel* per ottenere le Fig. 6, 7 e 8 richiede una lunga gestione dei dati: per esempio per le traslazioni si *deve utilizzare una formula ricorsiva* per calcolare nel primo dato per ogni intervallo di tempo dt , la variazione di velocità dv/dt (dall'accelerazione iniziale $-\frac{kz_0 + \varepsilon\alpha_0}{m}$, poi la variazione di z (da dz/dt) e infine l'accelerazione calcolata per il nuovo z viene collocata nella riga successiva (fine del ciclo). Quindi, *selezionando e trascinando* in ogni colonna, i dati vengono calcolati per tutti i valori. La stessa procedura deve essere eseguita per le rotazioni.

Quindi si devono inserire nei primi dati le formule appropriate, per ogni termine attraverso le equazioni (2), (3), (4), e propagare il calcolo per tutte le colonne, e infine si possono utilizzare i valori calcolati per costruire i vari grafici.

Un metodo molto più semplice e veloce potrebbe essere la modellizzazione dinamica, come mostrato più avanti.

6. Modello dinamico

Nella Sezione precedente abbiamo utilizzato *Excel* per ottenere una prima occhiata all'analisi energetica (Fig. 6, 7, 8) ma questo processo piuttosto noioso non fornisce risultati del tutto soddisfacenti. Alcune simulazioni del pendolo di Wilberforce possono essere trovate sul *web*, tuttavia non offrono la possibilità di confrontare i risultati con i dati sperimentali né presentano solitamente un'analisi degli aspetti energetici [18-19]. Più adatti a questo scopo sono gli strumenti di *modellizzazione dinamica* oggi disponibili, che consentono di costruire modelli selezionando e combinando alcuni elementi strutturali di base. Tra le varie possibilità, di seguito presentiamo i risultati ottenuti con il *software* gratuito *InsightMaker* [20], che richiede solo una connessione a Internet.

In *InsightMaker* creiamo il modello utilizzando: a) *reservoirs* che rappresentano grandezze fisiche (estensive che possiamo immaginare siano “immagazzinate” nel sistema, come quantità di moto $p = mv$, momento angolare $L = I\omega$). Nella Fig. 9 sono mostrati come vasi cilindrici; b) *flow rates*, indicati come segmenti spessi con doppie frecce, che implementano, ad ogni istante, il corretto valore degli scambi in entrata e/o in uscita dal serbatoio a cui sono collegati; c) *costanti* o *variabili*, indicate come cerchi, che rappresentano grandezze fisiche generiche; d) *collegamenti*, mostrati come linee con una sola freccia (la direzione della freccia indica quale *primitiva* influenza l'altra *primitiva*). Una quinta primitiva, denominata *convertitore*, rappresentata da un esagono, consente un confronto tra i risultati del modello e i dati sperimentali importati come file CSV.

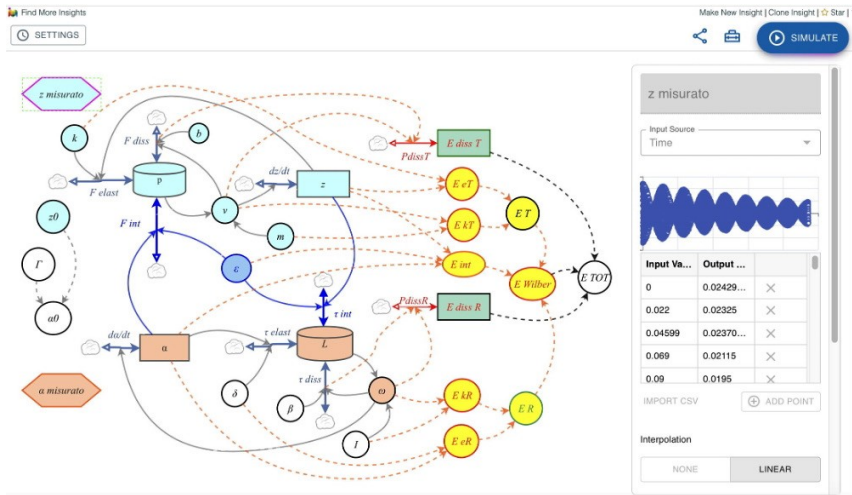


Figura 9. Modello dinamico ottenuto con *InsightMaker*. I dati sperimentali allegati per le traslazioni possono essere visualizzati facendo clic sulla primitiva “z misurata”. Il pulsante *SIMULATE* avvia il processo e visualizza i grafici.

Il nostro modello è stato costruito come segue:

- per il moto traslazionale definiamo un *reservoir* per la quantità di moto p , collegato a tre diversi *flow rates*: uno che descrive gli scambi dovuti alla forza elastica di richiamo $F_{\text{elast}} = -kz$, uno che descrive gli scambi dovuti alla forza dissipativa (scegliamo un regime lineare $F_{\text{diss}} = -bv$ poiché la dissipazione è dovuta essenzialmente all'attrito dell'aria), e infine uno che tiene conto della forza di accoppiamento $F_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\varepsilon\alpha$;

- per il moto rotatorio si definisce un *reservoir* per momento angolare L , con tre *flow rates*: uno che descrive la coppia elastica di richiamo $\tau_{elast} = -\delta\alpha$, uno che descrive la coppia dissipativa (per regime lineare $\tau_{diss} = -\beta\omega$, e uno che rappresenta la coppia di interazione $\tau_{int} = -\frac{1}{2}\varepsilon z$;
- successivamente definiamo un insieme di *variabili* con valori costanti, che rappresentano tutti i parametri che caratterizzano il pendolo (i coefficienti b e β devono essere scelti correttamente per adattarsi allo smorzamento sperimentale);
- quindi definiamo le due *variabili* per la velocità lineare $v=p/m$ e la velocità angolare $\omega=L/I$. Queste, interpretate come tassi di variazione, permettono di determinare i valori di spostamento verticale $z(t)$ e di rotazione $\alpha(t)$ che sono rappresentati come *serbatoi* (valori ottenuti per integrazione e rappresentati con rettangoli nel modello).

Per determinare il moto del pendolo, è necessario specificare anche le condizioni iniziali: ad esempio possiamo scegliere di liberare il pendolo da fermo, spostandolo verticalmente (cioè $z(0) = z_0$), ma senza alcuna rotazione (cioè $\alpha(0) = 0$).

A questo punto, il modello è completo per quanto concerne la cinematica e la dinamica del movimento del pendolo. Prima di procedere al confronto tra i dati sperimentali e i risultati del modello, discutiamo brevemente come vengono implementati gli aspetti energetici. Questi sono raccolti nella parte destra del modello (Fig. 9):

- i quattro termini (energia cinetica ed elastica per traslazioni e rotazioni) sono definiti come *variabili*, poiché tutte le grandezze necessarie per ottenerli sono già presenti nel modello: per traslazione $E_T = E_{kT} + E_{eT} = \frac{1}{2}(mv^2 + kz^2)$, per le rotazioni: $E_R = E_{kR} + E_{eR} = \frac{1}{2}(I\omega^2 + \delta\alpha^2)$, e per l'energia di accoppiamento: $E_{int} = \frac{1}{2}\varepsilon\alpha z$. Infine definiamo la *variabile* $E_{Wilber} = E_T + E_R + E_{int}$ che dà l'energia totale associata al pendolo;
- un approccio diverso è necessario per l'energia dissipata, poiché può essere espressa solo come integrazione della potenza dissipata. Nel modello questo si traduce nell'uso di una coppia di *flow-rates* per ogni movimento: i *flow-rates* definiscono i tassi di dissipazione istantanei ($P_{dissR} = \omega\tau_{diss}$ e $P_{dissT} = vF_{diss}$) mentre i *reservoirs* rettangolari (E_{dissR} e E_{dissT}) danno il valore dell'energia dissipata;
- infine usiamo di nuovo una *variabile* per definire l'energia totale del sistema $E = E_{Wilber} + E_{dissR} + E_{dissT}$: la sua evoluzione temporale ci dirà se il nostro modello è conforme o meno al principio di conservazione dell'energia.

Una volta costruito il modello⁴, è sufficiente impostare l'incremento temporale nella simulazione (ad esempio 0,01 s), il tipo di algoritmo (scegliamo Runge-Kutta del 4° ordine) e la durata della simulazione.

4 Il modello è liberamente accessibile all'indirizzo insightmaker.com/insight/6irPM4EXtLfXCMTOVo4YEv/Wilberforce-L-FnS-energia. Una descrizione dettagliata della costruzione del modello e l'elenco completo delle equazioni possono essere richiesti agli autori.

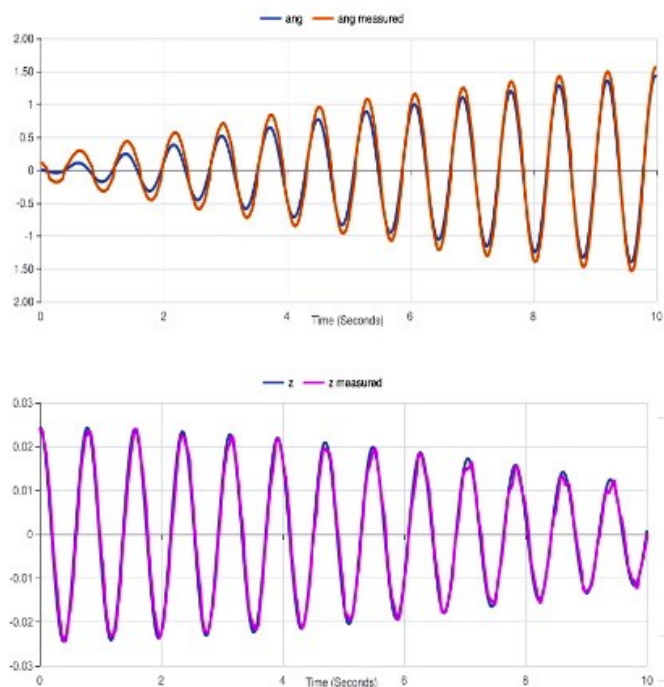


Figura 10. Confronto tra i dati sperimentali [arancione per lo spostamento e viola per l'angolo] e i risultati del modello [blu].

In primo luogo, siamo interessati al confronto tra i risultati del modello e i dati sperimentali ottenuti sia per gli spostamenti verticali che per quelli torsionali: l'andamento complessivo (vedi Fig. 9, circa 200 s) ci permette di regolare i fattori di dissipazione b e β . La Fig. 10 mostra il dettaglio dei primi 10 secondi (dove la linea blu rappresenta i dati sperimentali). Il risultato può essere considerato più che soddisfacente.

Nella Fig. 11 mostriamo i risultati per l'evoluzione dei termini cinetico ed elastico del moto traslatorio, e nella Fig. 12 lo stesso per il moto rotatorio. In entrambi i casi è ben visibile come i due contributi siano tra loro sfasati, mentre la loro somma, a causa della presenza del termine dissipativo, abbia il caratteristico andamento a gradoni.

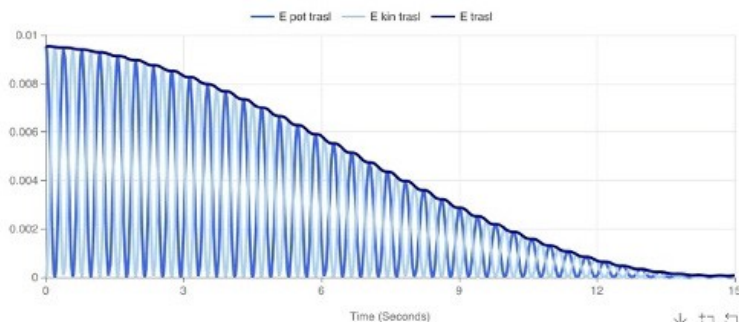


Figura 11. Evoluzione dell'energia di traslazione per 15 s.

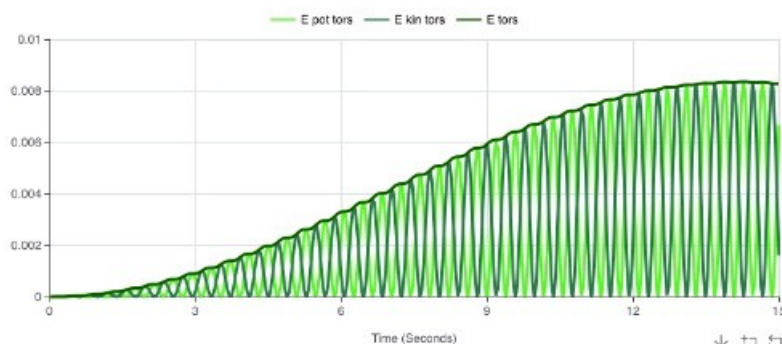


Figura 12. Evoluzione dell'energia torsionale per 15 s.

L'evoluzione temporale dei vari termini per un tempo molto più lungo è mostrata in Fig. 13: in particolare osserviamo che la quantità E mostra un valore costante. Ciò indica che il nostro modello rispetta il principio di conservazione dell'energia.

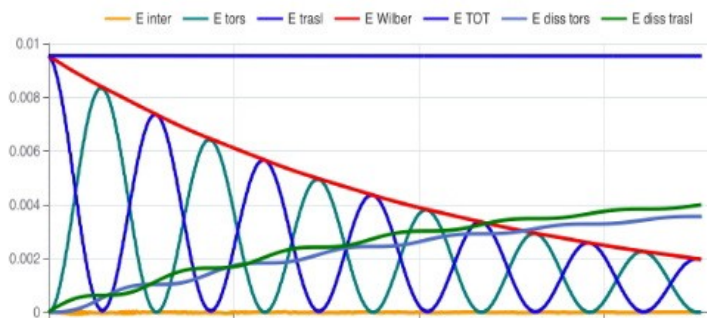


Figura 13. Grafici per le diverse forme di energia ottenuti con il nostro modello.

Ingrandendo il grafico di Fig. 13 (Fig. 14) possiamo osservare più in dettaglio l'energia associata al moto di traslazione (curva verde). Oltre alle fitte increspature dovute alla variazione nel tempo della velocità (per ogni oscillazione, quando essa è nulla, è nullo anche il tasso di dissipazione e quindi anche la pendenza nel grafico), osserviamo globalmente un andamento ritmato dalla frequenza di battimento: la pendenza, infatti, è massima a $t = 0$ s, $t \approx 30$ s, ... (pura traslazione). Un andamento complementare viene ovviamente osservato per l'energia associata al moto di rotazione (curva blu): essa risulta infatti massima a $t \approx 15$ s, $t \approx 45$ s, ... (pura rotazione).

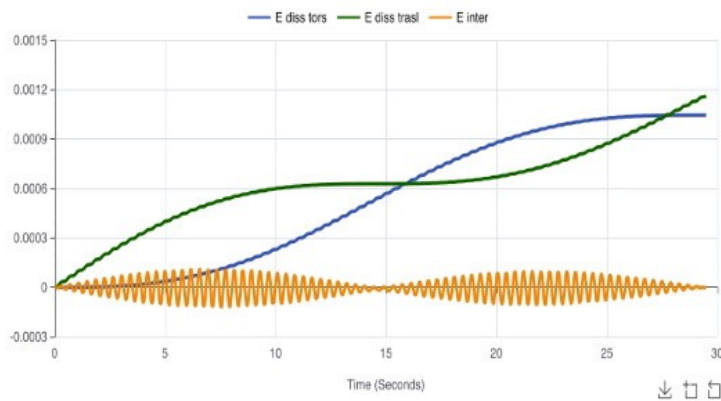


Figura 14. Dettagli dell'energia di interazione [arancio] e dissipata nelle traslazioni [verde] e nelle rotazioni [blu] per i primi 30 secondi.

L'energia di interazione oscilla con frequenza $2\omega_0$, è modulata con la frequenza di battimento $2\omega_B$, e raggiunge l'ampiezza zero ogni volta che il movimento è puramente rotazionale o puramente traslazionale.

Infine, illustriamo i risultati per i modi normali (Fig. 15).

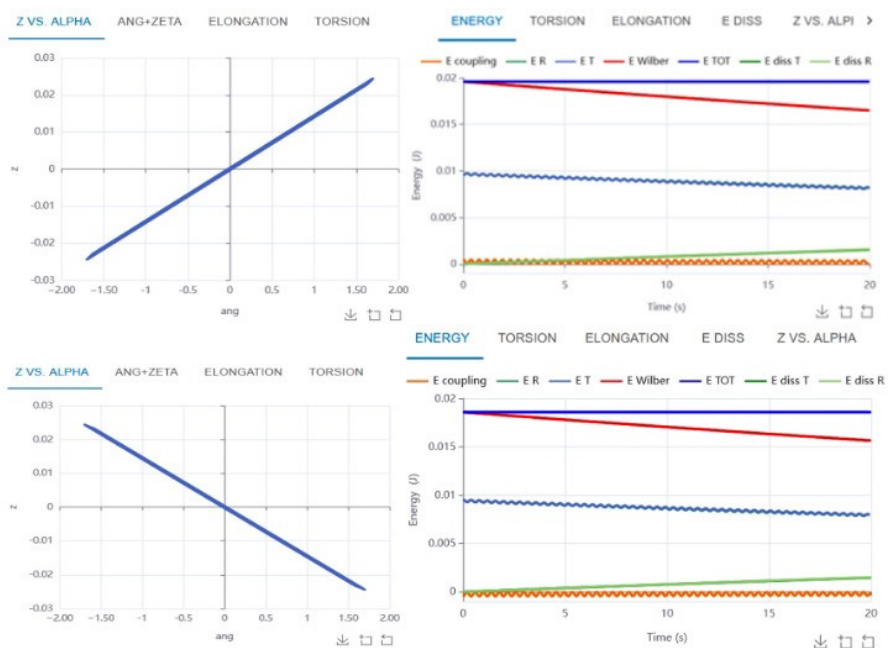


Figura 15. Modi normali. A sinistra: le traiettorie nel piano $z - \alpha$, a destra: gli aspetti energetici. In alto sono mostrati i risultati per il modo normale 1 [oscillazione in fase e maggiore energia], in basso quelli per il modo normale 2 [oscillazione in opposizione di fase e minore energia].

Questi possono essere ottenuti modificando solo i valori delle condizioni iniziali, che dovrebbero essere impostate (vedi Sezione 5) come $z_0 = +\Gamma\alpha_0$ per il modo normale 1 (in oscillazione di fase) e $z_0 = -\Gamma\alpha_0$ per il modo normale 2 (oscillazione in

opposizione di fase).

La Figura 15 mostra anche gli aspetti energetici per i due modi normali: si noti che l'energia di interazione, mentre oscilla, è positiva per il modo normale 1 e negativa per il modo normale 2.

Conclusioni

Il pendolo Wilberforce è un dispositivo che suscita sempre interesse e curiosità [21] e viene utilizzato con successo sia nei corsi introduttivi che in quelli avanzati di meccanica. È particolarmente interessante da un punto di vista didattico perché fornisce un esempio non banale di un sistema che manifesta moti oscillatori accoppiati. Su questo tema si trovano diversi contributi in letteratura, recentemente soprattutto in relazione all'uso delle nuove tecnologie (*smartphone* e sistemi di analisi video [22]). In questo articolo descriviamo un nuovo apparato⁵ che consente, utilizzando l'acquisizione di dati in tempo reale, di catturare in modo indipendente sia lo spostamento verticale che quello rotazionale: utilizzando un MEMS pilotato da un microcontrollore EPS32 con *Wi-Fi* e *Bluetooth* integrati, in connessione con l'applicazione gratuita *Phyphox* è possibile ottenere dati che caratterizzano *completamente* il movimento.

La seconda parte dell'articolo è dedicata all'analisi dei dati ottenuti, estesa in particolare agli aspetti energetici, prima utilizzando il foglio di calcolo *Excel*, poi avvalendosi della modellizzazione dinamica. Con il *software* scelto (*InsightMaker*) è stato possibile evidenziare sia l'evoluzione temporale dell'energia associata ai moti di oscillazione verticale e torsionale, sia quella dell'energia di accoppiamento e quella dell'energia dissipata, potendo così verificare la compatibilità del modello con il principio di conservazione dell'energia. Modificando opportunamente le condizioni iniziali, per concludere abbiamo ottenuto anche traiettorie nello spazio di configurazione bidimensionale nel caso dei modi normali, aspetto che ben evidenzia come la versatilità di questi strumenti consenta un efficiente utilizzo didattico delle moderne tecnologie.

Bibliografia

- [1] G. TORZO, M. ZANICHELLI, S. PASQUALOTTO, M. D'ANNA, The Wilberforce pendulum: a complete analysis using micro accelerometer/gyroscope, smartphone and dynamical modeling, *Lat. Am. J. Phys. Educ.* **19**, 1306 1-9 (2025).
- [2] U. KÖPF, Wilberforce's pendulum revisited, *Am. J. Phys.* **58**, 833-837 (1990).
- [3] R. E. BERG, T. S. MARSHALL, Wilberforce pendulum oscillations and normal modes, *Am. J. Phys.* **59**, 32-38 (1991).
- [4] F. G. KARIORIS, Wilberforce pendulum, demonstration size, *The Phys. Teacher* **31**, 314-315 (1993).
- [5] M. HÜBNER, J. KRÖGER, Adiabatic transfer in Wilberforce pendulum normal modes, *Am. J. Phys.* **86**, 818-824 (2018).
- [6] V. DE SOUZA, P.G. QUEIRUGA, E. MARINHO JR, Experimental study of coupled oscillations on a Slinky Wilberforce pendulum, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **44**, e20220037 (2022).
- [7] A. SOMMERFELD, *Lissajous-Figuren und Resonanzwirkungen bei schwingenden Schraubenfedern; ihre Verwertung zur Bestimmung des Poissonschen Verhältnisses*, in Adolph Wüllner Festschrift, Leipzig, 162-193 (1905).
- [8] A. SOMMERFELD, Coupled oscillations of a helical spring, *J. Optical Soc. A. Rev. Sci. Instr.* **7**, 529-535 (1923).
- [9] A. SOMMERFELD, *Mechanics of deformable bodies: lectures on theoretical physics II*, Acade-

⁵ Per dettagli si veda www.labtrek.it/it/pendolo-di-wilberforce/.

- mic Press, New York, 308-314 (1950).
- [10] E. DEBOWSKA, S. JAKUBOWICZ, Z. MAZUR, Computer visualization of the beating of a Wilberforce pendulum, *Eur. J. Phys.* **20**, 89-95 (1999).
- [11] P. DEVAUX, V. PIAO PIAU, O. VIGNAUD, G. GROSSE, R. OLARTE, AND A. NUTTIN, Cross-camera tracking and frequency analysis of a cheap Slinky Wilberforce pendulum, *Emergent Scientist* **3**, 1-8 (2019).
- [12] B. KOS, M. GRODZICKI E R. WASIELEWSKI, Electronic system for the complex measurement of a Wilberforce pendulum, *Eur. J. Phys.* **39**, 1-6 (2018).
- [13] M. H. GIMÉNEZ, I. SALINAS, J.A. MONSORIÚ, J. CASTRO-PALACIO, Direct Visualization of Mechanical Beats by Means of an Oscillating Smartphone, *The Physics Teacher* **55**, 424-425 (2017).
- [14] L. F. KASPER, New options for the old Wilberforce pendulum, *The Phys. Teacher* **61**, 628-629 (2023).
- [15] J. KUHN E P. VOGT, Analyzing spring pendulum phenomena with a smartphone acceleration sensor, *The Phys. Teacher* **50**, 504-505 (2012).
- [16] T. GALLOT, D. GAU, R. GARCIA-TEJERA, Coupled oscillations of the Wilberforce pendulum unveiled by smartphones, *Am. J. Phys.* **91**, 873-878 (2023).
- [17] Per esempio: 3BScientific - U61021 e PASCO - ME8091.
- [18] A.F. GARCIA, *Interactive Physics Course on the Internet*, www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/wilberforce/wilberforce.html, 2016.
- [19] *Wolfram Demonstration Project*, demonstrations.wolfram.com/TheWilberforcePendulum.
- [20] insightmaker.com/.
- [21] C. UCKE, H.J. SCHLICHTING, Das Vallet Federpendel, *Phys. Unserer Zeit.* **4**, 197-199 (2021).
- [22] Q. WEN AND L. YAN, Theoretical and experimental studies of the Wilberforce pendulum, *Eur. J. Phys.* **42**, 1-25 (2021).

Si invitano i soci a versare la quota di associazione (50 €) per l'anno 2026.

Si ricorda che in caso di mancato rinnovo entro il 30 giugno 2026 viene sospeso l'invio della rivista *La Fisica nella Scuola*.

Il pagamento della quota può essere fatto (cfr.: www.aif.it/iscriviti/):

- tramite conto corrente postale con bonifico bancario o postagiato
- con carta di credito sul sito sicuro *Paypal*
- con il bonus della carta docente per i docenti delle istituzioni statali
- con bollettino su conto corrente postale dedicato al rinnovo.